

Санкт-Петербургский государственный университет

Факультет прикладной математики-процессов управления, июль 2006г.

Дневное отделение

В заданиях А1 - А10 правильный ответ выделите знаком  $\surd$  в прямоугольнике около соответствующего номера.

А1. Найдите производную функции  $y = \cos(7x + 11)$ .

- 1)  $\surd$   $-7 \sin(7x + 11)$ ;  2)  $-\sin(7x + 1)$ ;  3)  $7 \sin(7x + 1)$ ;  4) другое значение.

А2. Найдите значение выражения  $\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$ .

- 1)  $\surd$   $\sqrt{6}$ ;  2)  $7\sqrt{2}$ ;  3)  $3\sqrt{6}$ ;  4) другое значение.

А3. Упростите выражение  $\frac{1 - (\sin(x - \pi) + \cos(x + \pi))^2}{1 - 2 \sin^2(\pi + x)}$ .

- 1)  $\text{tg } 2x$ ;  2)  $\sin 2x$ ;  3)  $\surd$   $-\text{tg } 2x$ ;  4) другое выражение.

А4. Найдите область определения функции  $y = \log_x(3^x - 81)$ .

- 1)  $x \in (\log_3 82; +\infty)$ ;  2)  $\surd$   $x \in (4; +\infty)$ ;  3)  $x \in (2; +\infty)$ ;  4) другое значение.

А5. Найдите значение параметра  $a$  из уравнения  $125^{a-1} \cdot (0,2)^3 = 1$ .

- 1)  $\frac{5}{6}$ ;  2) 1;  3)  $\surd$  2;  4) другое значение.

А6. Даны функции  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$  и  $g(x) = \frac{1}{x}$ . Чему равно значение  $f(g(5))$ ?

- 1)  $\surd$   $-\frac{5}{4}$ ;  2)  $-\frac{1}{4}$ ;  3)  $\frac{5}{4}$ ;  4) другое значение.

А7. Найдите наименьшее целое решение неравенства  $\sqrt{2x+1} > 1-x$ .

- 1)  $\surd$  1;  2) 2;  3) 0;  4) другое решение.

А8. Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной равной 4.

- 1)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ;  2)  $\surd$   $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ;  3)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ;  4) другое значение.

А9. Задана геометрическая прогрессия  $\frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \dots$ . Найдите сумму ее членов со второго по пятый.

- 1)  $\frac{5}{81}$ ;  2)  $\frac{65}{81}$ ;  3)  $\surd$   $\frac{200}{243}$ ;  4) другое значение.

А10. При каких значениях параметра  $a$  векторы  $\vec{x} = \{-3; 4a + 1\}$  и  $\vec{y} = \{4 - a; -1\}$  перпендикулярны.

- 1)  $\surd$   $-13$ ;  2)  $-1$ ;  3) 1;  4) другое значение.

В заданиях В1-В10 запишите только ответ.

В1. Найдите наибольший корень уравнения  $|x - 5| - 2|x + 3| = 5$ .

Ответ:  $-2$ .

В2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = x^3 - 3x + 1$  и прямыми  $x = -\frac{7}{2}$ ,  $x = -\frac{5}{2}$ ,  $y = 0$ .

Ответ:  $\frac{71}{4}$ .

В3. Вычислите  $\cos\left(2 \operatorname{arccotg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ .

Ответ:  $-\frac{4}{5}$ .

В4. Найдите сумму кубов корней уравнения  $2x^2 + 3x - 1 = 0$ .

Ответ:  $-\frac{45}{8}$ .

В5. Решите неравенство  $\sqrt{x^2 + 9} > 9 - x$ .

Ответ:  $x \in (4; +\infty)$ .

В6. Найдите наибольший корень уравнения  $\sin 2x = \cos 5x$ , принадлежащий интервалу  $(0; \pi)$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{14}$ .

В7. Найдите знаменатель бесконечной геометрической прогрессии, если ее сумма в семь раз больше суммы членов этой прогрессии с четными номерами.

Ответ:  $\frac{1}{6}$ .

В8. Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, вписанного в сферу, равна 256. Его измерения относятся как 2:2:3. Найдите радиус сферы, описанной около параллелепипеда.

Ответ:  $\sqrt{34}$ .

В9. В равностороннем треугольнике  $ABC$  сторона равна 5. На стороне  $BC$  лежит точка  $D$ , а на стороне  $AB$  - точка  $E$  так, что  $BD = \frac{5}{3}$ ,  $AE = DE$ . Найдите длину  $CE$ .

Ответ:  $\frac{13}{3}$ .

В10. Найдите площадь осевого сечения конуса, если известно, что высота конуса равна 4, а площадь поверхности конуса равна  $10\pi$ .

Ответ:  $\frac{20}{3}$ .

В заданиях С1 – С5 напишите обоснованное решение.

С1. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $(a + 2)3^{2x} - (3a + 11)3^x + 2a + 9 = 0$  имеет  $8a + 17$  корней. Найдите корни при этих значениях параметра  $a$ .

Ответ:  $a_1 = -2, x = 0; a_2 = -\frac{15}{8}, x = 0, x = \log_3 42$ .

С2. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3; \\ x^4 + x^3y - x^2y^2 + xy^3 + y^4 = 17. \end{cases}$$

Ответ:  $(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})$ .

С3. Решите уравнение  $\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 3x \cdot \operatorname{tg} 4x = 3(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 3x) + \operatorname{tg} 4x$

Ответ:  $x = \frac{k\pi}{4}, k \neq 4l + 2, k, l \in Z, x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$ .

С4. Около треугольника  $ABC$  описана окружность и к ней в точке  $A$  проведена касательная, пересекающая прямую  $BC$  в точке  $T$ . Найдите длины отрезков  $CT$  и  $AT$ , если  $AB = 6, AC = 7, BC = 8$ .

Ответ:  $CT = \frac{392}{13}, AT = \frac{336}{13}$ .

С5. Решите уравнение  $\sqrt{\frac{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}{2}} = 3(1 - 2x^2)$ .

Ответ:  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{70} - \sqrt{2}}{12}$ .