

1. Найти первый член конечной арифметической прогрессии, состоящей из десяти членов, такой, что после вычеркивания одного из них сумма оставшихся равна 18, сумма всех членов, находящихся перед вычеркнутым, равна 7, а вычеркнутый член меньше 2.

2. Решить неравенство $\frac{3x}{2\sqrt{5-x}-\sqrt{x}} - \frac{3x-2\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}} \leq 2$.

3. Решить уравнение $\cos x(2\sin x - 3) = 2\sqrt{3}\cos 2x + 2\sin x$.

4. Медиана AM треугольника ABC пересекает вписанную в нее окружность, радиус которой равен r , в точках P и Q . Найти площадь треугольника, если известно, что хорда PQ в два раза длиннее каждого из отрезков AP и MQ .

5. К сфере, вписанной в треугольную пирамиду, проведены касательные плоскости, параллельные граням пирамиды. Вокруг четырех пирамид, отсекаемых этими плоскостями от исходной пирамиды, описаны сферы. Радиусы трех из них равны 10. Найти радиус четвертой сферы, если известно, что радиус описанной сферы исходной пирамиды равен 19.

1. Найти первый член конечной арифметической прогрессии, состоящей из одиннадцати членов, такой, что после вычеркивания одного из них сумма оставшихся равна 10, сумма всех членов, находящихся перед вычеркнутым, равна 7, а вычеркнутый член меньше 1.

2. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x}-2x}{\sqrt{10-x}-2x} + \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{x}} \geq 2$.

3. Решить уравнение $\cos x(1 - 8\sin x) = 3\cos 2x + 2\sqrt{6}\sin x$.

4. Медиана BD треугольника ABC пересекает вписанную в нее окружность, радиус которой равен r , в точках M и N . Найти радиус описанной окружности треугольника, если известно, что хорда MN равна каждому из отрезков BM и ND .

5. Радиус сферы, вписанной в треугольную пирамиду равен 17. К этой сфере проведены касательные плоскости, параллельные граням пирамиды. В четыре пирамиды, отсекаемые этими плоскостями от исходной пирамиды, вписаны сферы. Радиусы трех из них равны 8. Найти радиус четвертой сферы.

Ответы . Вариант 1.

1. Первый член прогрессии равен $\frac{179}{110}$. 2. $x \in [1; \frac{5}{2}] \cup (4; 5]$.

3. $x = \arctg \frac{3}{2} + \arctg 2\sqrt{3} + 2\pi k$, $x = \frac{1}{3}(\arctg 2\sqrt{3} - \arctg \frac{3}{2}) + \frac{(2k+1)\pi}{3}$, $k \in Z$.

4. Площадь треугольника ABC равна $\frac{13\sqrt{39}}{12} r^2$.

5. Радиус четвертой сферы равен 8.

Вариант 2.

1. Первый член прогрессии равен $\frac{193}{144}$. 2. $x \in (0; 1] \cup (\frac{-1+\sqrt{161}}{8}; 5]$.

3. $x = \arctg \frac{4}{3} + \arctg 2\sqrt{6} + 2\pi k$, $x = \frac{1}{3}(\arctg \frac{4}{3} - \arctg 2\sqrt{6}) + 2\pi k$, $k \in Z$.

4. Радиус описанной окружности треугольника ABC равен $\frac{325}{72} r$.

5. Радиус четвертой сферы равен 10.

Факультет прикладной математики - процессов управления
Вечерняя и заочная форма, 2005
Вариант 1

1. При каких значениях x числа $3x$, $4x + 2$ и $6x - 1$ являются членами некоторой арифметической прогрессии, разность которой больше 2, и при этом $3x$ и $6x - 1$ являются пятым и двадцать четвертым ее членами соответственно?

2. Решить уравнение $\cos 3x - \cos 5x = 3 \cos 2x$.

3. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{|x - 3|} \leq \frac{\sqrt{2x + 2}}{x - 3}$.

4. Точка M является серединой медианы CD тупоугольного треугольника ABC . Расстояние от точки M до прямых AC и BC равны 14 и 16 соответственно. Найти угол ABC , если известно, что угол BAC равен $\frac{\pi}{3}$.

5. Основаниями прямой призмы являются прямоугольные треугольники с катетами 6 и 8. Высота призмы равна 3. В одно из оснований вписана окружность. Найти расстояние от ее центра до самой дальней вершины призмы.

Вариант 2

1. При каких значениях x числа $3x$, $4x - 2$ и $6x + 1$ являются членами некоторой арифметической прогрессии, разность которой больше 3, и при этом $3x$ и $6x + 1$ являются четвертым и двадцать четвертым ее членами соответственно?

2. Решить уравнение $\sin 3x + \sin 5x = 3 \cos 2x$.

3. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{|x - 2|} \leq \frac{\sqrt{3x + 6}}{x - 2}$.

4. Расстояние от точки пересечения медиан тупоугольного треугольника ABC до прямых AB и AC равны 10 и 12 соответственно. Найти угол ACB , если известно, что угол ABC равен $\frac{\pi}{4}$.

5. Основаниями прямой призмы являются прямоугольные треугольники с катетами 5 и 12. Высота призмы равна 11. В одно из оснований вписана окружность. Найти расстояние от ее центра до самой дальней вершины призмы.

Ответы .

Вариант 1.

1. $x = \frac{45}{2}$.

2. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{13}-1}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

3. $x \in \{-1\} \cup [4, 6]$. 4. $\angle ABC = \pi - \arcsin \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

5. Расстояние равно 7.

Вариант 2.

1. $x = 23$.

2. $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{13}-1}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

3. $x \in \{-2\} \cup [3, 6]$. 4. $\angle ABC = \pi - \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{5}$.

5. Расстояние равно 15.